数理解析研究所講究録
611巻 1987年 158-172

微分不可能計画問題における2次最適性条件とその応用

九大理　丸山幸宏（Yukihiro Maruyama）

§1　Introduction

凸集合制約をもつ非線形計画問題に対して必要条件を導きそれを最適制御問題に適用したものとして、Girsanov [3]、Maurer [6]、等がある。ところがそれらは1次の必要条件であり、[3]では1次の方向微分、[6]ではFréchet微分を用いて論じている。

また Furukawa and Yoshinaga [1]、Furukawa [2] では、Neustadt 微分を用いて、凸集合制約のない非線形計画問題に対する2次の必要条件を Primal form で与えている。

ここではまず Neustadt 微分を用いて凸集合制約をもつ非線形計画問題に対する2次の必要条件を Primal form で与える。次にその dual form（Lagrange multiplier による）を導き、最適制御問題及び Lagrange の問題に適用する。

§2　2次の必要条件、Primal form 及び dual form

本報告では次のような問題について取り扱う。

$$
(P)\quad \begin{cases} f(x) \longrightarrow \mathrm{Min} \\ \quad \text{subject to} \\ h(x) = 0 \quad (\text{等式制約}) \\ \quad x \in Q \qquad (\text{凸集合制約}) \end{cases}
$$

$$
(P')\quad \begin{cases} f(x) \longrightarrow \mathrm{Min} \\ \quad \text{subject to} \\ h(x) = 0 \quad (\text{等式制約}) \end{cases}
$$

ただし、

X, Y : Banach space

$Q \subset X$: Q は convex set, $\mathrm{int}\, Q \neq \phi$

$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$

$h : X \longrightarrow Y$

Definition 2.1 (Neustadt 微分)

$\hat{X}, \hat{Y}$: Banach space

$\hat{U} \subset \hat{X}$: $\hat{U}$ は open set

$f : \hat{U} \longrightarrow \hat{Y}$, $x_0 \in \hat{U}$, $x_1 , x_2 \in \hat{X}$

$$f^{(1)}(x_0 ; x_1) \equiv \lim_{\substack{y \to x_1 \\ \lambda \downarrow 0}} \frac{1}{\lambda} [f(x_0 + \lambda y) - f(x_0)] \in \hat{Y}$$

$$f^{(2)}(x_0, x_1 ; x_2) \equiv \lim_{\substack{y \to x_2 \\ \lambda \downarrow 0}} \frac{1}{\lambda^2} [f(x_0 + \lambda x_1 + \lambda^2 y) - f(x_0) - \lambda f^{(1)}(x_0 : x_1)] \in \hat{Y}$$

$f^{(1)}(x_0 ; x_1)$ が存在するとき

▨ f は x_0 で Neustadt 微分可能という。

f が x_0 で Neustadt 微分可能で与えられた x_1 に対して $f^{(2)}(x_0, x_1 ; \cdot)$ が存在するとき

▨ f は x_0 で 2 回 Neustadt 微分可能という。

Definition 2.2 (tangent direction の cone 及び 2次の変分集合)

X : Banach space

$Q \subset X$: 任意の nonempty set

$x_0 \in \mathrm{cl}\, Q$

$$V(Q\,;x_0) \equiv \left\{ h \in X \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists t_0 > 0, \exists r : (0, t_0] \to X \\ \text{s.t.} \\ x_0 + th + r(t) \in Q \quad \forall t \in (0, t_0] \\ \|r(t)\|/t \longrightarrow 0 \text{ as } t \downarrow 0 \end{array} \right\}$$

$V(Q\,;x_0)$: Q の x_0 における tangent direction の cone

$x_0 \in \mathrm{bd}\, Q$, $x_1 \in X$

$$F(Q\,;x_0, x_1) \equiv \left\{ h \in X \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists_{\text{nbd.}}\, U \text{ of } h, \exists t_0 > 0 \\ \text{s.t.} \\ x_0 + tx_1 + t^2 U \subset Q \quad \forall t \in (0, t_0] \end{array} \right\}$$

$x_0 \in \mathrm{int}\, Q$ に対して $F(Q\,;x_0, x_1) \equiv X$

$F(Q\,;x_0, x_1)$: 2次の feasible direction の変分集合.

Theorem 2.1 (Primal form 1)

x_0 : (P) の local minimum solution

f : x_0 で 2回 Neustadt 微分可能

h : x_0 で 2回 Fréchet 微分可能

$Dh(x_0) : X \longrightarrow Y$ onto mapping

このとき

$$
\begin{aligned}
f^{(1)}(x_0 ; y) &= 0 \\
Dh(x_0)y &= 0 \\
y &\in V(Q ; x_0)
\end{aligned}
$$

をみたす各 $y \in X$ に対して

$$
\begin{cases}
f^{(2)}(x_0, y ; x) < 0 \\
Dh(x_0)x + \frac{1}{2} D^2h(x_0)(y, y) = 0 \\
x \in F(Q ; x_0, y)
\end{cases}
$$

を同時にみたす $x \in X$ は存在しない.

$V(Q ; x_0)$, $F(Q ; x_0, y)$ についての性質を次の Proposition で述べる.

Proposition 2.1

X : Banach space

$X \supset Q$: convex set , $\mathrm{int}\, Q \neq \emptyset$

$Q \ni x_0, x_1$: given

このとき

(1) $V(Q\,;\,x_0) \supset Q - x_0$

(2) $F(Q\,;\,x_0, x_1 - x_0) \supset \mathrm{cone}(\mathrm{int}\, Q - x_1)$

Proposition2.1 と Theorem 2.1 より次の Theorem を得る.

Theorem 2.2 (Primal form 2)

Theorem 2.1 と同じ仮定のもとに,

$f^{(1)}(x_0\,;\,x_1 - x_0) = 0$, $Dh(x_0)(x_1 - x_0) = 0$

をみたす各 $x_1 \in Q$ に対して

$$\begin{cases} f^{(2)}(x_0, x_1 - x_0\,;\,x) < 0 \\ Dh(x_0)x + \frac{1}{2}D^2h(x_0)(x_1 - x_0, x_1 - x_0) = 0 \\ x \in \mathrm{cone}(\mathrm{int}\, Q - x_1) \end{cases}$$

を同時にみたす $x \in X$ は存在しない.

次に Primal form 2 の dual form (Lagrange multiplier による) をもとめる.

§3 で、この dual form を最適制御問題に適用する.

Theorem 2.3 (dual form)

$f^{(2)}(x_0, x_1; \cdot)$: convex, conti かつ Theorem 2.1と同じ仮定のもとに、

$$f^{(1)}(x_0; x_1 - x_0) = 0 \ , \quad Dh(x_0)(x_1 - x_0) = 0$$

をみたす各 $x_1 \in Q$ に対して、

$\exists \lambda_0 \geq 0$, $\exists z^* \in Y^*$ (Yのdual space), not all zero,

s.t.

$$\boxed{\begin{aligned} &\lambda_0 f^{(2)}(x_0, x_1 - x_0; x) + \langle z^*, Dh(x_0)x + \tfrac{1}{2}D^2h(x_0)(x_1 - x_0, x_1 - x_0) \rangle \\ &\qquad \geq 0 \quad \text{for } \forall x \in \mathrm{cl\,cone}(\mathrm{int}\, Q - x_1) \end{aligned}}$$

凸集合制約のない問題(P′)に対しては次のようになる。

Corollary 2.1

x_0 : (P′) の local minimum solution ,

$f^{(2)}(x_0, x_1; \cdot)$: convex , continuous ,

Theorem 2.1 と同じ仮定のもとに、

$$f^{(1)}(x_0; x_1) = 0 \ , \quad Dh(x_0)x_1 = 0$$

をみたす各 $x_1 \in X$ に対して、$\exists z^* \in Y^*$ s.t.

$$\boxed{\begin{aligned} &f^{(2)}(x_0, x_1; x) + \langle z^*, Dh(x_0)x + \tfrac{1}{2}D^2h(x_0)(x_1, x_1) \rangle \geq 0 \\ &\qquad \text{for } \forall x \in X \end{aligned}}$$

§3 最適制御問題及び Lagrange の問題への応用

Proposition 3.1

$$f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$F(x) \equiv \int_a^b f(t, x(t))\,dt : L_n^\infty[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

① $f(\cdot, x)$: measurable for each $x \in \mathbb{R}^n$

② $f(t, \cdot)$: twice differentiable for each $t \in \mathbb{R}$

③ $\exists\, \rho(t)$: summable function, $\exists\, \varepsilon > 0$,

s.t.

$$|f_x(t,x)| + \|f_{xx}(t,x)\| \leq \rho(t)$$

whenever $|x - x_0(t)| < \varepsilon$ a.e. $t \in [a,b]$

$$x_0 \in L_n^\infty[a,b]$$

このとき、F は x_0 で2回 Neustadt 微分可能であり、

$$\boxed{\begin{aligned} F^{(1)}(x_0; x_1) &= \int_a^b f_x(t, x_0(t))\, x_1(t)\, dt \\ F^{(2)}(x_0, x_1; x) &= \int_a^b \left\{ f_x(t, x_0(t))\, x(t) + \frac{1}{2} x_1^*(t)\, f_{xx}(t, x_0(t))\, x_1(t) \right\} dt \end{aligned}}$$

② で、$f(t,\cdot)$: continuously differentiable である必要はない。

cf. Girsanov [3].

最適制御問題

$$
(P1)\begin{cases}
\displaystyle\int_a^b f^0(t, x(t), u(t))\,dt \longrightarrow \mathrm{Min} \\
\text{subject to} \\
\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u(t)) \quad \text{a.e. } t \in [a,b] \\
x(a) = x^0, \quad x(b) = x^1 \quad (\text{固定端}) \\
u(t) \in U \quad \text{a.e. } t \in [a,b] \\
(x, u) \in W^{\infty}_{n,1}[a,b] \times L^{\infty}_m[a,b]
\end{cases}
$$

ただし、

$$f^0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\mathbb{R}^m \supset U : \text{convex set}, \ \mathrm{int}\,U \neq \emptyset$$

$$W^{\infty}_{n,1}[a,b] \equiv \{ x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \text{ absolutely conti.}, \ \dot{x} \in L^{\infty}_n[a,b] \}$$

ここで

$$X \equiv W^{\infty}_{n,1}[a,b] \times L^{\infty}_m[a,b],$$

$$Y \equiv L^{\infty}_n[a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$ とおく.

◎ $X \ni (x,u)$ に対して、$\|(x,u)\| \equiv \max\{\|x\|_\infty, \|\dot{x}\|_\infty, \|u\|_\infty\}$ によってノルムを導入すると、X は Banach space になる。

さらに、

$$f(x,u) \equiv \int_a^b f^0(t, x(t), u(t))\,dt$$

$$h(x,u) \equiv (\dot{x}(\cdot) - \varphi(\cdot, x(\cdot), u(\cdot)),\ x(a) - x^0,\ x(b) - x^1)$$

$$Q \equiv \{(x,u) \in X \mid u(t) \in U \quad a.e.\ t \in [a,b]\}$$

とおくと、(p1) は次の型の問題になる。

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$h : X \longrightarrow Y$$

$$(p2)\begin{cases} f(x,u) \longrightarrow \mathrm{Min} \\ \quad \textit{subject to} \\ h(x,u) = 0 \quad (\text{等式制約}) \\ (x,u) \in Q \quad (\text{凸集合制約}) \end{cases}$$

⊘ $\mathrm{int}\, Q = \{(x,u) \in X \mid \exists \delta > 0,\ B_\delta(u(t)) \subset U\ a.e.\ t \in [a,b]\} \neq \phi$

(p2) に Theorem 2.3, Proposition 3.1 を適用する。

Theorem 3.1

(x_0, u_0) : (p1) の *local minimum*

Condition

① $f^{\circ}(\cdot, x, u)$: *measurable for each* $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

② $f^{\circ}(t, \cdot, \cdot)$: *twice differentiable for each* $t \in \mathbb{R}$

③ $^{\exists}M > 0,\ ^{\exists}\varepsilon > 0,$

s.t.

$$|\nabla f^{\circ}(t, x, y)| + \|\nabla^2 f^{\circ}(t, x, y)\| \leq M$$

whenever $|x - x_0(t)| + |y - u_0(t)| < \varepsilon$ a.e. $t \in [a, b]$

$$\nabla f^{\circ}(t, x, y) \equiv (f^{\circ}_x(t, x, y), f^{\circ}_u(t, x, y))$$

$$\nabla^2 f^{\circ}(t, x, y) \equiv \begin{pmatrix} f^{\circ}_{xx}(t, x, y) & f^{\circ}_{xu}(t, x, y) \\ f^{\circ}_{ux}(t, x, y) & f^{\circ}_{uu}(t, x, y) \end{pmatrix}$$

④ φ : *twice continuously differentiable*

⑤ [completely controllable]

$$\left\{ x(b) \in \mathbb{R}^n \ \middle|\ \begin{array}{c} \dot{x}(t) = \varphi_x[t]x(t) + \varphi_u[t]u(t) \\ x(a) = 0 \\ u(\cdot) \in L^{\infty}_m[a, b] \end{array} \right\} = \mathbb{R}^n$$

① ~ ③ より、f : 2回 *Neustadt* 微分可能、④ より、h : 2回 Fréchet 微分可能、⑤ より、$Dh(x_0, u_0)$: $X \to Y$ *onto mapping*.

//

このとき

$$\begin{cases} \int_a^b (f_x^0[t]y_1(t) + f_u^0[t]v_1(t))\,dt = 0 \\ \dot{y}_1(t) = \varphi_x[t]y_1(t) + \varphi_u[t]v_1(t) \\ y_1(a) = y_1(b) = 0 \end{cases}$$

をみたす各 $(y_1, v_1) \in Q - (x_0, u_0)$ に対して.

$\exists \lambda_0 \geq 0$, $\exists \lambda^*(t)$, $\exists \sigma_1 \in \mathbb{R}^n$, $\exists \sigma_2 \in \mathbb{R}^n$, *not all zero*,

s.t.

[1st order] (cf. Girsanov [3], Maurer [6])

(1) $$\frac{d\lambda^*(t)}{dt} = \lambda_0 f_x^0[t] - \lambda^*(t)\varphi_x[t] \quad a.e.\ t \in [a,b]$$

(2) $$\lambda^*(a) = \sigma_1, \quad \lambda^*(b) = \sigma_2$$

(3) $$(\lambda_0 f_u^0[t] - \lambda^*(t)\varphi_u[t],\ u - u_0(t)) \geq 0$$
$$\text{for } \forall u \in U, \quad a.e.\ t \in [a,b]$$

[2nd order]

(4) $$\int_a^b (y_1^*(t), v_1^*(t)) \begin{pmatrix} H_{xx}[t] & H_{xu}[t] \\ H_{ux}[t] & H_{uu}[t] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix} dt \geq 0$$

以上において次の略記号を用いる。

$$f_x^0[t] \equiv f_x^0(t, x_0(t), u_0(t))$$
$$f_u^0[t] \equiv f_u^0(t, x_0(t), u_0(t))$$
$$\varphi_x[t] \equiv \varphi_x(t, x_0(t), u_0(t))$$
$$\varphi_u[t] \equiv \varphi_u(t, x_0(t), u_0(t))$$
$$H(t, x, u) \equiv \lambda_0 f^0(t, x, u) - \lambda^*(t)\varphi(t, x, u)$$
$$H_{xx}[t] \equiv H_{xx}(t, x_0(t), u_0(t))$$
$$H_{xu}[t] \equiv H_{xu}(t, x_0(t), u_0(t))$$
$$H_{ux}[t] \equiv H_{ux}(t, x_0(t), u_0(t))$$
$$H_{uu}[t] \equiv H_{uu}(t, x_0(t), u_0(t)) .$$

Lagrange の問題

$$(\mathcal{P}'1)\begin{cases} \int_a^b f^0(t, x(t), u(t))\,dt \longrightarrow \mathrm{Min} \\ \textit{subject to} \\ \dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u(t)) \\ x(a) = x^0, \quad x(b) = x^1. \\ (x, u) \in W^{\infty}_{n,1}[a,b] \times L^{\infty}_m[a,b] \end{cases}$$

$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $h : X \longrightarrow Y$ を $(\mathcal{P}1)$ の時と同様に定義すると、$(\mathcal{P}'1)$ は次の型の問題になる。

$$(P'2)\begin{cases} f(x,u) \longrightarrow \text{Min} \\ \quad \textit{subject to} \\ h(x,u) = 0 \end{cases}$$

$(P'2)$ に Corollary 2.1, Proposition 3.1 を適用する.

Theorem 3.2

(x_0, u_0) : $(P'1)$ の local minimum

Theorem 3.1 の Condition ①〜⑤ のもとに、

$\exists \lambda^*(t)$, $\exists \delta_1 \in \mathbb{R}^n$, $\exists \delta_2 \in \mathbb{R}^n$, not all zero, s.t.

[1st order] (cf. Ioffe and Tihomirov [4])

(1) $\dfrac{d\lambda^*(t)}{dt} = f_x^0[t] - \lambda^*(t)\varphi_x[t]$ a.e. t

(2) $\lambda^*(a) = \delta_1$, $\lambda^*(b) = -\delta_2$

(3) $f_u^0[t] = \lambda^*(t)\varphi_u[t]$

[2nd order]

(4) $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \varphi_x[t]x_1(t) + \varphi_u[t]u_1(t) \\ x_1(a) = x_1(b) = 0 \end{cases}$

をみたす $\forall(x_1, u_1) \in W_{m,1}^{\infty}[a,b] \times L_m^{\infty}[a,b]$ に対して.

$$\int_a^b (x_1^*(t), u_1^*(t)) \begin{pmatrix} H_{xx}[t] & H_{xu}[t] \\ H_{ux}[t] & H_{uu}[t] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ u_1(t) \end{pmatrix} dt \geq 0$$

References

[1] Furukawa, N. and Yoshinaga, Y. (1985). Higher-order variational sets, variational derivatives and higher order necessary conditions in abstract mathematical programming.

[2] Furukawa, N. (1985). 微分不可能計画における2次最適性条件とその応用.「数理計画における最適化理論とアルゴリズム」研究集会講演予稿, 於 京大数理研.

[3] Girsanov, I. V. (1972). Lectures on mathematical theory of extreme problems, Lecture notes in economics and mathematical systems 67.

[4] Ioffe, A. D. and Tihomirov, V. M. (1979). Theory of extremal probrems. North-Holland, Amsterdam

[5] Maurer, H. and Zowe, J. (1979). First and second order necessary and sufficient optimality conditions for infinite-dimensional programming problems, Math. Programming vol.16, No.1 p98-110

[6] Maurer, H. (1981) First and second order sufficient optimality conditions in mathematical programming and optimal control, Math. Programming Study vol.14, p163-177